Cuadernos de Economía Vol. 13. 323-349. 1.985.

El teorema de Okishio en ciertos tipos de economías convexas.

Julio Sánchez Chóliz

Departamento de Matemáticas.
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.
Universidad de Zaragona.
c/. Doctor Cerrada, 1 – 50005 Zaragoza

El teorema de Okishio ha sido estudiado hasta hoy en economías Leontief y von Neumann (Okishio (1961) y Roemer (1980 y 1981)). Ahora queremos generalizarlo para algunas economías convexas más amplias y que tienen limitaciones en las dotaciones iniciales.

Primeramente definimos el modelo económico y sus tipos de equilibrio y vemos que para dos de ellos existe siempre solución, son las llamadas soluciones casi reproducibles y las soluciones casi competitivas.

A continuación revisamos la influencia del número de capitalistas en el teorema, viendo cuando esta cuestión es indiferente y proponiendo una solución para los demás casos.

Después demostramos una extensión del teorema para tasas garantizadas y soluciones casi reproducibles, viendo para finalizar la relación entre las tasas garantizadas de las soluciones casi reproducibles y de las casi competitivas.

The Okishio's theorem has been just studied in Leontief and von Neumann's models (see Okishio (1961) and Roemer (1980 and 1981). This article extend it for a more general economy with convex production sets and limited initial endowments.

Firstly, that I define the economic model and its possible equilibria, then I proof there exist always solutions in two of them, named quasi reproducible solutions and quasi competitive solutions.

Another important issue is to know which is the impact of the capitalist's number in the theorem, I proof when it's not important and I show a solution for resting cases.

Besides I extend the Okishio's theorem for warranted rates of profit and quasi reproducible solutions and I get a relation between warranted rates under quasi reproducible solutions and quasi competitive solutions.

1. Introduccion

En este trabajo se desea profundizar en ciertos aspectos del conocido Teorema de Okishio (ver Okishio (1961)) y aclarar en mayor medida aquello que subyace bajo la afirmación de que las innovaciones reductoras de coste aumentan la tasa de beneficio. Esta tesis puede probarse fácilmente en una economía lineal sin producción conjunta, tipo Leontief, donde ella tiene pleno sentido, sin dar lugar a indefiniciones, lo que sin embargo no sucede en otros modelos.

En economías tipo Von Neumann, que tienen producción conjunta, puede ocurrir que la innovación suponga la obtención de un producto conjunto distinto, y que los costes sean de productos diferentes, mientras que en las anteriores los costes eran de un mismo producto. Además en estas economías las tasas de beneficio posible no son únicas y surge la indeterminación de cual de ellas será la afectada por un posible teorema de Okishio. Para este tipo de economías J. Roemer (Roemer 1980) ha obtenido una interesante generalización del teorema de Okishio, usando como tasa referencial de beneficio la tasa de beneficio garantizada.

En los dos modelos anteriores de economías lineales todos los procesos admiten cualquier nivel de actividad, pero esto no sucede, en general, en las economías convexas; ya que en ellas puede haber para cada tipo de proceso un nivel mínimo y/o uno máximo. Esto último, supone también limitaciones en los costes posibles. Todo ello se complica, aún más si existen recursos limitados en la economía. lo que supondrá ciertas acotaciones para los costes, pudiendo estar por encima o por debajo de las cotas que generan los posibles niveles de producción. De tal manera que podemos encontrarnos con situaciones de exceso de capital o recursos, que tampoco aparecían en las economías lineales. Todo esto influye sobre la existencia de tasas de beneficio, así como en sus valores y son, por tanto, cuestiones ineludibles si se considera el problema de la generalización del Teorema de Okishio. Por ello, en las economías a considerar, podrá haber límites tanto en los niveles admisibles de actividad como en las dotaciones de recursos.

Igualmente, en este trabajo se desea incorporar los recursos exógenos para comprobar si el teorema estará o no afectado por la existencia de estos; por ello en las economías convexas, a definir, estarán presentes tales recursos.

En las economías de Leontief los precios son independientes del output, lo cual simplifica la cuestión al poder prescindir de la reproducibilidad o de si se agotan o no los recursos. Pero estas cuestiones sí que interesan en las economías convexas, lo que obliga a establecer el tipo de equilibrio sobre el que se apoya el teorema, estableciendo claramente que niveles de reproducibilidad posee.

También se considera la cuestión del número de agentes (empresarios, capitalistas, . . . la denominación es lo de menos y se utilizarán estos nombres como equivalentes). En las economías tipo Leontief y Von Neumann, como se supone que todos ellos tienen acceso a las distintas tecnologías existentes y que hay rendimientos constantes a escala, un empresario será el prototipo de todos ellos. De tal manera que sus elecciones, su tasa de beneficio, etc., serán equivalentes. No obstante, cuando se elige en diferentes conjuntos de producción, ya no será trivial el hecho de que la conducta global pueda estudiarse a través de uno solo. Así pues dado que se mantendrá la figura del empresario único, deberá explicarse claramente el significado económico de ese único agente y su relación con los agentes individuales que engloba.

Por último, se señala que en las economías convexas la tasa media de beneficio deja de coincidir con la tasa marginal, al contrario de lo que ocurría en las economías Von Neumann. Ello obliga a elegir el tipo de tasa con la que se aborda la generalización. La opción hecha es la de la tasa media, puesto que se considera que el sentido del Teorema de Okishio está más ligado a ella que a una tasa marginal, lo que no supone su descalificación sino todo lo contrario, ya que el estudio completo de los efectos reductores del coste en la tasa de beneficio exigirá estudiar tanto el efecto en la tasa media como en la tasa marginal.

Para abordar la generalización buscada bajo estas direcciones, en apartado 2 se define la economía convexa en la que se quiere trabajar estableciendo algunas de sus propiedades; en el apartado 3, se estudia el problema de uno o varios capitalistas y su influencia según el teorema de Okishio; en el 4 se aborda la generalización del teorema en cuestión; y mientras que en el 5 se explican los resultados obtenidos, así como su significación económica.

La mayoría de las demostraciones están hechas en el apéndice, pudiendo ser ignoradas por aquellos que estén poco interesados en cuestiones formales.

2. DEFINICION, PROPIEDADES Y EQUILIBRIOS DE LA ECONOMIA CONVEXA

Trabajamos en una economía con N capitalistas, cada uno de ellos tiene un conjunto P^t de alternativas de producción. Hay n mercancías producibles dentro de la economía y m + 1 no producibles, m de estas son los recursos exógenos a la economía (recursos naturales, productos raros, etc...) y la restante es la fuerza del trabajo.

Los procesos productivos del capitalista t serán los vectores a^t de 2n+m+1 componentes, a saber: $a^t = (a_o^t, a_n^t, a_p^t, a_f^t) = (a_j^t)$

donde

$a_o^t \geqslant 0$, es el input de fuerza de trabajo.

$a_n^t \geqslant 0$, es el vector de m componentes, que da los inputs de recursos exógenos.

$a_p^t \geqslant 0$, de n componentes, da los inputs de recursos producibles.

$a_f^t \geqslant 0$, tiene n componentes y da los outputs.

Los conjuntos P^t cumplen las propiedades siguientes:

P.1: P^t es convexo

P.2: P^t es cerrado

P.3: $\exists\, k = cte > 0 \;\epsilon\; a_j^t < k a_o^t \,,\ \forall j, \forall a^t \in P^t$

Las economías así definidas incluyen las de Von Neumann y Leontief y prácticamente todas las generadas por conos convexos. Sobre la exigencia de P.3 o de otras condiciones similares puede verse el apéndice de Sánchez (1985).

La economía tiene también limitaciones en sus recursos iniciales, cumpliéndose:

. . cada agente t tiene un vector $S_p^t \geqslant 0$, de n componentes, de recursos iniciales producibles. El stock inicial de la economía es $\sum_t S_p^t = S_p$

.. cada agente t tiene un vector $S_n^t \geqslant 0$, de m componentes, de recursos exógenos. Las posibilidades de toda la economía son $S_n = \Sigma\ S_n^t$

.. el trabajo disponible para cada t es T^t, siendo $T = \sum_t T^t$ el de la economía.

Debe señalarse el distinto carácter que tienen S_p y S_n, ambos son recursos inciales necesarios, pero mientras S_p son recursos acumulables y que suponen por ello un capital, S_n debe ser adquirido exógenamente para poner en marcha el proceso, con el capital que supone el S_p.

Los precios se establecen en estas economías con

2.1. *Definición.–* Llamaremos vector de precios p a todo vector p = $= (p_n, p_p) \geqslant 0$ de m + n componentes con el vector de m componentes $p_n > 0$ y el $p_p \geqslant 0$.

Las m primeras componentes son los precios de las mercancías exógenas, las n últimas como los de las producibles. La condición $p_n > 0$ nos dice que los bienes exógenos no son libres y gratuitos, si lo fueran no tendría mucho sentido considerarlos al definir los a^t.

La fuerza de trabajo es pagada con una cesta de bienes $b = (b_n, b_p)$, b_n son los bienes exógenos y b_p los producibles. El salario será $w = pb = p_n b_n + p_b b_p$.

Para normalizar los precios usaremos.

2.2. *Criterio.–* Los precios verifican siempre:

$$p_p\, d = 1 \text{ con } d = (d_1, \ldots, d_n) > 0$$

que es posible porque siempre $p_p \geqslant 0$

Los S_p^t tienen en esta economía una importante limitación, que es decisiva para que se cumplan algunas propiedades fundamentales, esta restricción la concretamos en:

2.3. *Hipótesis.–* Los S_p^t verifican: $\exists\, \epsilon > 0$ tal que $\forall p_p$ y $\forall\, a \in P^t$ cumple:

$$h_a(a_o\, pb + p_n a_n + p_p a_p) \leqslant p_p\, S_p^t \,/\, (1+\epsilon)$$

siendo $\quad h_a = \min \quad h \geqslant 0 \quad h\, a \in P^t \quad y \quad p_n$ fijo

El sentido de esta hipótesis es claro, el término de izquierda representa el gasto del proceso 'a" a la mínima escala posible, la expresión $p_p S_p^t$ da el gasto posible máximo del agente a precios p, luego dice que hay en general, para todo precio p_p y para todo proceso un intervalo de niveles de actividad posibles.

Pasemos ahora a fijar la conducta del capitalista. La elección de t sobre los procesos de producción será hecha entre aquellos procesos de P^t cuyos gastos pueda pagar, de acuerdo con el criterio de optimizar el beneficio, por ello

2.4. *Definición.–* Llamaremos conjunto posible de procesos de producción de t a precios p al conjunto.

$$B^t(p) = \quad a \in P^t / \, a_o pb + p_n a_n + p_p a_p \leqslant p_p S_p^t$$

B

Al usar sólo S_p^t se resalta el carácter exógeno de los bienes no producibles.

2.5. *Definición.–* Llamaremos conjunto de los procesos de producción optimizadores del beneficio a precios p del capitalista t a

$$A^t(p) = \quad a \in B^t(p) \,/\, p_p a_f - a_o pb - p_n a_n - p_p a_p \text{ es máximo}$$

2.6. *Definición.–* Llamaremos solución casireproducible (SCR) a todo (p, a) con $a = \sum_t a^t$ tal que

1) $a^t \in A^t(p)$ (maximización del beneficio)

2) $a = a_f - a_p \geqslant a_o\, b_p$ (reproducibilidad)

3) $p_p d = 1$ (criterio de normalización)

2.7. *Definición.–* Llamaremos solución reproducible (SR) a todo (p,a) con $a = \sum_t a^t$, tal que:

1) es solución casireproducible;

2) $a_o b_p + a_p \leqslant S_p$;

3) $a_o b_n + a_n \leqslant S_n$;

4) $a_o \leqslant T$

Debo señalar que el concepto de SCR es diferente del usado en Roemer (1981), pág. 42, aunque son muy parecidos, las diferencias nacel del diferente objetivo buscado.

2.8. *Definición.*– Llamaremos solución casicompetitiva (SCC) a toda (p,a) con $a = \sum_t a^t$ tal que:

1) $a^t \in A^t(p)$;

2) $a_o b_p + a_p \leqslant S_p$;

3) $p_p d = 1$

2.9. *Definición.*– Llamaremos solución competitiva a toda (p,a), con $a = \sum_t a^t$, tal que:

1) es SCC;

2) $a_o b_n + a_n \leqslant S_n$; 3) $a_o \leqslant T$

De los cuatro tipos de equilibrio, todos ellos significativos en economías con recursos exógenos y endógenos limitados, solo de los casireproducibles y de los casicompetitivos es asegurable la existencia en condiciones muy generales, por ello sólo sobre estos dos tipos será posible generalizar el teorema de Okishio. En mi opinión ambos tipos incorporan suficientemente la problemática, en la que estamos interesados. Para asegurar la existencia necesitamos.

2.10. *Hipótesis.*– En la economía se verifica también una de las tres condiciones siguientes:

1) $\forall t$, $\exists M^t = cte > 0 \quad a_o t \leqslant M^t$, $\forall a^t \in P^t$;

2) $b_p > 0$;

3) $b_n \geqslant 0$

La condición 1) asegura las acotaciones necesarias al combinarse con P3 y la 2) y la 3) a través de la limitación de los recursos S_p^t. Con 2.10 se puede asegurar que $B^t(p)$ y $A^t(p)$ son vacíos, convexos y cerrados, que $B^t(p)$ es una correspondència hemicontínua inferiormente (h.c.i), que $A^t(p)$ y $A(p) = \sum_t A^t(p)$ son hemicontínuas superiormente y que $A(p_n) = \bigcup_{p \in S} A(p)$, con $S = (p_n, p_p)$ p_n es fijo, $p_p d = 1$, es compacto. Con estas propiedades podrán demostrarse los dos teoremas de existencia posteriores. Las demostraciones de estas propiedades pueden verse en Sánchez (1985), en donde la economía usada es algo más general.

La existencia de SCR está asegurada por

2.11. *Teorema.*– Si hay espectativas estacionarias, existe una SCR para todo p_n que cumple 2.3. Los beneficios de la SCR pueden ser negativos. Demostración: puede verse en A.1.

La existencia de SCC es similarmente asegurada por

2.12. *Teorema.*– Si hay espectativas estacionarias existe un SCC para todo p_n que cumple 2.3.

Demostración: puede verse en A.2

Aunque 2.11 y 2.12 nos dan la existencia de SCR y de SCC no puede hacer lo mismo con las SR y SC, como se ve en:

2.13. *Ejemplo.*– Sea la economía definida por el cono convexo de

$$a^1 = (1; 0; 0{,}3; 0{,}2; 1; 0) \text{ y } a^2 = (2; 0; 0{,}2; 0{,}0; 1)$$

con $$b = (0; 0{,}1; 0{,}2) \text{ y } S_p = (S_{p,1}, S_{p,2}) \geqslant 0$$

con $$S_{p,1} + S_{p,2} = 0{,}8$$

que equivale a una economía Leontief con

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0 \end{bmatrix}; \quad M = A + bL = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}4 \end{bmatrix}$$

Puede comprobarse que en ella las SCR serán las (p, X) tales que

1) $p = (0; 1/2; 1/2)$ con $d = (1,1)$

2) $X = (x_1, 1-x_1)$ con $0{,}6 \geqslant x_1 \geqslant 0{,}4$

y que para ser SR deberán además verificar

3) $MX = 0{,}4 \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} S_{p,1} \\ 0{,}8 - S_{p,1} \end{bmatrix}$ con $0 \leqslant S_{p,1} \leqslant 0{,}8$

4) $0 \leqslant S_n$

5) $LX = (1,2)(x_1, x_2)^T = x_1 + 2x_2 \leqslant T$

luego

a) si $S_p = (0{,}4; 0{,}4)$, $S_n = 0{,}1$ y $T = 3/2$, habrá soluciones como la ((0; 1/2; 1/2), (1/2; 1/2)) que son reproducibles.

b) si $S_p = (0{,}6; 0{,}2)$, $S_n = 0{,}1$ y $T = 3/2$, la ((0; 1/2; 1/2), (1/2; 1/2)) es SCR, pero no es SR porque no cumple 3). Más aún como en $\forall$SCR se tiene $x_1 + x_2 = 1$ no hay ninguna SR.

Al estudiar las SCC y las SC nos encontramos con una situación similar, si $S_p = (0{,}4; 0{,}4)$ y usamos la misma normalización, las X que dan los máximos beneficios son

$X = (1,0)$ para $p_{p,1} \in [0{,}5; 1]$

$X = (x_1, x_2)$ con $x_1 + x_2 = 1$ para $p_{p,1} = 0{,}5$

$X = (0,1)$ para $p_{p,1} \in [0; 0{,}5]$

que nos permite comprobar que

c) si $S_p = (0{,}4; 0{,}4)$, $S_n = 0$ y $T = 1/2$ hay SCC con $p_{p,1} \in [0, 0{,}4]$ y $X = (0,1)$, pero no es SC, más aún no hay SC porque todas ellas necesitan una fuerza de trabajo superior a T.

d) También hay casos en que hay SC, en las condiciones de a) había SR, que son también SC.

Vista la existencia de SCR y de SCC en este tipo de economías es posible plantearse si se cumple o no el Teorema de Okishio sobre las

SCR o sobre las SCC, más como en ambos casos puede haber varias soluciones y por tanto diversas tasas de beneficio, que pueden ser afectadas de diferente forma por la innovación técnica, es necesario investigar si hay una tasa garantizada en las SCR o en las SCC. Su existencia es asegurada sobre economías donde P^t es único, al haber un solo agente por

2.14. *Proposición.*– Se verifica si hay un solo agente

a) Si $\exists\ p \ni a = 0 \in A(p)$, que existe y es nula la tasa garantizada de beneficio en SCR (SCC)

b) Si $a = 0 \notin A(p)$, $\forall p$ y se cumple que $g(p,a) \neq 0$, $\forall p_p$, $\forall a \neq 0$, $a \in P$. [1]

1) $H(p_n) = \left\{ (p,a) \quad p_p d = 1;\ p_n \text{ fijo};\ a \in A(p);\ a_f - a_p - a_o b_p > 0 \right\}$ es compacto.

2) $K(p_n) = \left\{ (p,a) \quad p_p d = 1;\ p_n \text{ fijo};\ a \in A(p);\ a_o b_p + a_p \leqslant S_p; \right\}$

es compacto

3) La tasa de beneficio alcanza un máximo y un mínimo en $H(p_n)$

4) La tasa de beneficio alcanza un máximo y un mínimo en $K(p_n)$

Demostración: ver A.3

3. Sobre el numero de agentes

En el modelo de economía planteado las diferencias de conducta entre capitalistas se deben en gran medida a la desigualdad de información tecnológica (sus conjuntos de producción son diferentes) y a las dotaciones de recursos que poseen, lo que puede originar beneficios y elecciones de tecnología óptima diferentes. Debido a ello no debe admitirse "a priori" que la economía tiene un solo empresario.

1. Exigir $g(p, a) \neq 0$, $\forall p_p$, $\forall a \neq 0$, $a \in P$ es equivalente a exigir: $b_n \geqslant 0$ ó $b_p > 0$ ó $a_n \geqslant 0$ ó $a_p > 0$, $\forall a \neq 0$, $a \in P$, como es fácil de comprobar.

Cuando en las economías Leontief se demuestra el teorema de Okishio se supone que hay un empresario ideal cuya conducta es equivalente a la colectiva, más la validez de esta hipótesis debe demostrarse.

3.1. *Proposición.–* En una economía de N agentes si se verifica:

1) $P^t = P, \forall P^t$

2) $S_p > 0$

3) $h a \in P^t, \forall h \geq 0, \forall a \in P^t$ [2]

se cumple:

a) si $(p; a^1, \ldots, a^N)$ es solución de uno de los tipos k vistos anteriormente de la economía de N capitalistas, $(p;\ a = \sum_t a^t)$ lo es del mismo tipo de la economía de uno solo con conjunto de producción $P = \sum_t P^t$ y recursos S_p, S_n y T.

b) si (p, a) es solución de tipo k de una economía de recursos S_n, S_p y T, de un solo capitalista y de conjunto P, hay una solución $(p;\ a^1, \ldots, a^N)$, con $a = \sum_t a^t$, del mismo tipo de una economía de recursos S_p^t, S_n^t y T^t, $t = 1, \ldots, N$, $S_p = \sum_t S_p^t$, $S_n = \sum_t S_n^t$ y $T = \sum_t T^t$.

Demostración:

a) Las condiciones 1) y 3) aseguran que $P = \sum_t P^t = P^t, \forall t$ y que no hay, tanto en una como en otra economía, más restricción en la elección de escala que los recursos. Por tanto cualquiera de los capitalistas elige para todo p los mismos procesos, aquellos que dan la tasa máxima de beneficio. En consecuencia si $(p;\ a^1_, \ldots, a^N)$ es solución para recursos $S_p^1, \ldots, S_p^N$, también $(p;\ \sum_t a^t)$ lo será para el capitalista único

2. La condición 1) y 3) aseguran también que $\sum_t P^t = P$, luego el empresario conjunto tiene también el mismo conjunto P.

de recursos $S_p = \sum_t S_p^t$. Trivialmente en ambas economías la solución será del mismo tipo.

b) Es trivial, basta observar que $(p;\ a^1 = p_p S_p^1 / p_p S_p, \ldots, a^N = p_p S_p^N / p_p S_p)$, que cumple $\sum_t a^t = a$, es solución de la N capitalistas.

Esta proposición justifica la hipótesis de un solo agente en economías Von Neumann con información completa, pero en nuestro caso puede haber diferencias de información y no verificarse la condición 3). Ello exige una justificación más profunda si queremos usar un solo empresario al estudiar el teorema de Okishio. El ejemplo que sigue reforzará esta información.

3.2. *Ejemplo.*– Sea la economía de dos agentes asociada con P^1 y P^2, donde P^1 es generado por

$a^1 = h(1; 0; 1; 4)$ con $2 \geqslant h \geqslant 0$ y $a^2 = k(1; 0; 1; 3)$ con $k \geqslant 0$ y P^2 por

$a^3 = s(0,9; 0; 1,1; 4)$ con $2 \geqslant s \geqslant 0$ y los mismos a^2, y que tiene $b = (0; 1)$, $S_p^1 = 2$, $S_p^2 = 6$, $S_n^1 = S_n^2 = 0$ y $p_n = 1$

En esta economía si $p_p = (1)$

$A^1(p) = (1; 0; 1; 4)$ con un beneficio igual a 2

$A^2(p) = 2(0,9; 0; 1,1; 4) + (1; 0; 1; 3)$ con un beneficio igual a 5.

Similarmente si $\sum_t P^t = P$ es el conjunto de procesos de la economía de un solo agente que tiene recursos $S_p = 8$ y $S_n = 0$, su $A(p)$ será $2(1; 0; 1; 4) + 2(0,9; 0; 1,1; 4)$ y producirá un beneficio de 8.

En consecuencia la solución (p, a^1, a^2) de la economía de dos agentes no produce una solución $(p, a^1 + a^2)$ de la de uno solo y recíprocamente la (p, a) de esta no es descomponible en una (p, a^1, a^2) de la de dos.

La afirmación de que una reducción de costes en una innovación eleva la tasa de beneficio tiene un carácter global para la economía, y esa tasa deberá ser la tasa media de beneficio o alguna tasa referencial por ello la generalización del Teorema de Okishio parece exigir un solo agente a pesar de lo visto en el ejemplo anterior. Este agente deberá poseer los recursos S_p, S_n y T y el conjunto de tecnologías $P = \Sigma P^t$ y su conducta optimizadora consistirá en repartir entre los distintos P^t sus recursos totales, optimizando en cada uno de ellos y maximizando a la vez la suma total de beneficios.

Es posible definir este agente conjunto y estudiar sus soluciones, que suelen llamarse de beneficio conjunto, pero la dificultad está en relacionarlas con las soluciones de agentes independientes que tuviera cada uno su S_p^t, S_n^t, T^t y P^t. Una de las mejores soluciones posibles, en mi opinión, es suponer que existe en la economía de N agentes un mercado de crédito, que homogeiniza la tasa de beneficio (ver Roemer (1981), en una economía parecida), bajo este supuesto puede comprobarse (Roemer 1981) y Sánchez (1984)) que toda $(p; a^1, \ldots, a^N)$, que sea SCR (SCC) para los N agentes da lugar a una $(p, a = \sum_t a^t)$, que es SCR (SCC) de beneficio conjunto y lo mismo recíprocamente, coinciden por tanto los precios de las soluciones, los procesos elegidos para cada P^t y los beneficios globales y la única diferencia es la asignación concreta de beneficios, ya que en la economía con mercado de crédito cada agente ve disminuídos o aumentados, según su caso, sus beneficios en los intereses de los capitales tomados a crédito o prestados a otros.

En consecuencia cuando se supone que en una economía convexa existe un único agente debemos considerarlos simplemente como una globalización de las conductas individuales, que actúan libremente y que disponen de la posibilidad del crédito para optimizar sus beneficios, y cualquier afirmación sobre la tasa de beneficio de ese agente deberá entenderse como una afirmación sobre la tasa resultante en la economía de N agentes con ese marco de actuación. Indudablemente existe también la posibilidad de interpretar ese agente conjunto como un centro de planificación totalmente centralizado, pero es una opción de menor interés.

4. Generalizacion del teorema de Okishio

Supondremos en todo este apartado que hay un solo capitalista que dispone de todos los recursos, de acuerdo con lo visto en el apartado anterior.

Vamos a obtener las generalizaciones para economías convexas, que cumplan además de las condiciones de definición del apartado 2, las siguientes.

4.1. *Hipótesis.*– El conjunto P verifica[3]

1) $b_p > 0$ ó $b_n \geqslant 0$

2) $\exists\, a \in P \ni a > 0$

3) $h\, a\, P, \forall\, h \geqslant 1, \forall\, a \in P$

La condición 1) asegura que $g(p,a) > 0$, $\forall\, p, \forall\, a \neq 0$, lo que suone una condición simplificadora en todas las demostraciones. La 2) establece que todo bien producible lo es con alguna actividad, pensemos que si el bien i lo fuera con a^i, $\forall\, i$, la actividad $a = \sum_i (a^i/n)$ cumpliría $a_f > 0$. Por último la condición 3) es una limitación sobre el tipo de economías convexas admisibles, nos asegura que el capital disponible es invertido y elimina así la posibilidad de que los efectos de la innovación no se manifiesten por disminución de los recursos empleados.

En estas economías definiremos proceso viable con

4.2. *Definición.*– Diremos que un proceso a es viable a precios p y tasa t si

$$p_p\, a_f > t \quad g(p_{min}, a)$$

y a es compatible con P.3.

Debe recordarse que los $p = (p_n, p_p)$ son precios normalizados, en los que p_p verifica $p_p\, d = 1$ con $d > 0$.

Como en 2.11 vimos que siempre hay un (p a) que es SCR y un 2.14 que existe una tasa de beneficio garantizada en las SCR, que llamaremos T_{min}, podemos establecer la siguiente generalización del Teorema de Okishio

4.3. *Proposición.*– Si $S_p > 0$, $0 \notin A(p_n)$, p_n es fijo y $t_{min} > 0$, se verifica

a) Los cambios viables en t_{min} y p_{min}[4] no disminuyen t_{min}.

b) Si a es viable para todo p_{min} asociado con t_{min}, la tasa garantizada en SCR crece estrictamente.

3. Son hipótesis parcialmente repetitivas de otras anteriores.

4. Diremos que p está asociado con t si E a $\in A(p)$ $t(p, a) = t$. Por p_{min} designaremos los precios asociados a t_{min}.

c) Los cambios viables elevan siempre la t_{min} de SCR si p_{min} es único. Recíprocamente si todos los cambios viables incrementan la t_{min} de SCR, el p_{min} es único.

Demostración: puede verse en A.4.

Veamos ahora si es posible extender estos resultados al caso de las SCC, la respuesta bajo ciertas condiciones es afirmativa porque la tasa garantizada en SCR (t_{SCR}) va a coincidir con la tasa garantizada con SCC (t_{SCC}).

Es fácil comprobar que en economías de von Neuman la t_{SCR} es menor o igual que la t_{SCC} , pero esto es válido también para los modelos de economía que usamos, esto es lo que nos dice

4.4. *Proposición.*– Si $S_p > 0$, se cumple 4.1, p_n es fijo y $0 \notin A(p_n)$, se verifica que $t_{SCR} \leqslant t_{SCC}$. Demostración: puede verse en A.t.

Con 4.4 la extensión del T. de Okishio a SCC tiene dos posibilidades, una cuando es $t_{SCR} = t_{SCC}$, en cuyo caso 4.3 es también la generalización para SCC, y otra si fuera $t_{SCR} < t_{SCC}$.

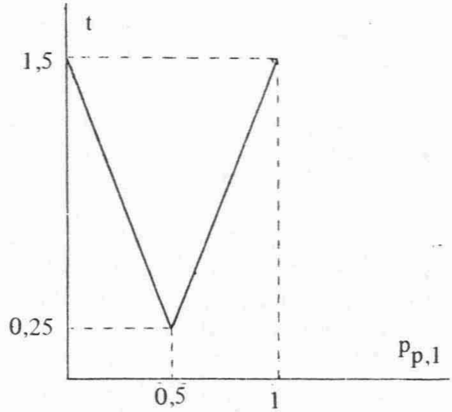
Para que esta segunda alternativa tenga sentido económico deberemos suponer que el empresario puede o sabe asegurarse la tasa t_{SCC}. Si suponemos que lo hace porque tiene un p tal que para todo p (p_n fijo) la tasa de beneficio en la solución óptima es $\geqslant t_{SCC}$, es indudable que $t_{SCR} \geqslant t_{SCC}$ y, como ya sabemos que $t_{SCR} \leqslant t_{SCC}$, tendremos la igualdad de las dos tasas y 4.3 será la generalización buscada para SCR y para SCC. Si por el contrario, para algún p la tasa en la solución óptima es $< t_{SCC}$, solo se podrá decir que el empresario se asegura la tasa t_{SCC} bien restringiendo el conjunto de p permitidos por 2.1 y 2.2 ó bien las opciones a tomar, en ambos casos el problema escapa del marco en estudio y no lo abordamos.

En resumen sólo consideramos los casos en que coinciden las tasas t_{SCC} y t_{SCC} y los procesos reductores de coste cumplen para SCR y SCC el teorema de Okisho, siendo 4.3 la generalización para ambos casos.

Para acabar veamos en un ejemplo como son posibles las dos alternativas, lo que justifica la decisión anterior.

4.5. *Ejemplo.*— Sean economías definidas como en 2.13 con S_p = = (0,4; 0,4) en un caso y con S_p = (0,6; 0,2 en otro.

En ambos puede comprobarse que la gráfica de las tasas de beneficio en las soluciones óptimas es



En 2.13 ya se vió que si S_p = (0,4; 0,4), la solución (p = (0; 0,5; 0,5), X = (0,5; 0,5)) era SR, pero en la gráfica se ve que a ella le corresponde la tasa mínima, en consecuencia si S_p = (0,4; 0,4) tendremos $t_{SCR} = t_{SCC} = 0{,}25$

Si S_p = (0,6; 0,2), las X óptimas son

$$X = (0{,}5 + p_{p,1}; 0) \quad \text{si } p_{p,1} \in [0{,}5; 1]$$

$$X = (x_1 \; x_2) \text{ con } x_1 + x_2 = 1 \text{ si } p_{p,1} = 0{,}5$$

$$X = (0; 0{,}5 + p_{p,1}) \text{ si } \quad p_{p,1} \in [0; 0{,}5]$$

por tanto la misma solución de antes es SCR y es t_{SCR} = 0'25.

Por el contrario para que sea SCC debe verificarse

$$\begin{pmatrix} 0{,}2 + 0{,}4 \ \ p_{p,1} \\ \\ 0{,}2 + 0{,}5 \ \ p_{p,1} \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$$

luego en las SCC es $p_{p,1} = 0$ y sólo es $(p = (0; 0; 1), X = (0; 0{,}5))$ solución de este tipo, siendo

$$t_{SCC} = 1{,}5 \quad \text{y por tanto} \qquad t_{SCC} > t_{SCR}.$$

5. Conclusiones

Aunque el objetivo de los apartados anteriores era principalmente generalizar el Teorema de Okishio, en las direcciones señaladas en la introducción, algunos resultados obtenidos tienen también interés por sí mismos, pero nos olvidaremos de estos aspectos.

En 2.11 y 2.12 se obtenían teoremas de existencia semejantes a otros de la literatura pero en ambos la economía tenía recursos exógenos y eso no es usual. Eran precisos para poder abordar el T. de Okishio en un modelo económico no cerrado, y así los resultados de 4 nos muestran que la condición de economía cerrada no es necesaria (bajo las limitaciones del modelo) para que las innovaciones reductoras de costes supongan una elevación de la tasa de beneficio.

El ejemplo de 2.13 revela que en estas economías es imposible generalmente exigir que se cumpla la reproducibilidad y las restricciones de recursos, si se exige todo ello es imposible asegurar la existencia de una solución óptima para cada agente o emprsario. Los equilibrios óptimos cumplen algunas de las limitaciones, o bien tienen reproducibilidad endógena y son las SCR, que asegurar el teorema de 2.11 que existen, o bien verifican las restricciones de recursos diferentes del trabajo y son las SCC, cuya existencia confirma 2.12. Más esto no es negativo en nuestro caso ya que al obtener en 4 el cumplimiento en las SCR y en las SCC, lo que vemos es que el criterio: *la reducción de costes eleva la tasa de beneficio* es cierto en condiciones más débiles, no son necesarias a la vez la reproducibilidad y la existencia de recursos suficientes, cuyo cumplimiento se suponían en los modelos de economías lineales cuadradas.

En 2.14 se veía que tanto para las SCR como para las SCC había una tasa de beneficio mínima alcanzable o tasa garantizada, esto supone por una parte extender el concepto ya usual en economías de Von Neumann a economías convexas y por otra asegurar que existe una tasa referencial mínima respecto de la que tienen sentido afirmaciones como *incremento de la tasa de beneficio* (es cierto que siempre podrá decirse de un agente que ha crecido su tasa anterior de beneficio, pero es distinto cuando nos referimos a una economía globalmente, porque la mejora de un individuo no supone la mejora general, ni la tasa referencial de uno es válida como tasa global), en este sentido cuando en 4.3 se generaliza el T. de Okishio para SCR respecto a la t_{min} se está obteniendo la generalización buscada se está asegurando que las reducciones de costes elevan esa tasa garantizada en las soluciones con reproducibilidad endógena.

En 4.3 pueden verse diversos apartados que completan el sentido de la generalización. Por una parte en a) se deja claro que un proceso viable o reductor del coste nunca es negativo, puede no mejorar la tasa garantizada pero nunca la disminuirá, ahora bien esta posibilidad existe y por tanto puede ser indiferente el proceso a pesar de ser reductor del coste, ya que sus efectos se limitan, si se incorpora el proceso, a un cambio de los precios y a trabajar con diferente proceso sin cambiar la tasa garantizada.

En b) se concretan condiciones para asegurar que la incorporación del proceso reductor de costes mejore la tasa de beneficio, lo que se pide es que sea reductor no solo para uno de los precios asociados con la tasa garantizada sino con todos los asociados con ella. En otras palabras que sea viable para cualquiera de las elecciones optimas posibles que dan la tasa garantizada. Indudablemente esto es pedir que el proceso tenga una viabilidad (carácter reductor) más fuerte que lo exigido en la definición 4.2, donde se pedía sólo para un precio.

Ligada con b) aparece la pregunta de cuando el precio asociado con la tasa garantizada es único, la respuesta está en c) y dice que si todos los cambios viables elevan la tasa de beneficio garantizada es que el vector de precios óptimo es único. En c) se dice más, se asegura que un cambio viable, tal como lo define 4.2 eleva siempre la tasa de beneficio garantizada sí y sólo si el vector de precios óptimos asociados es único.

De 4.4 hasta el final vemos que las tasas garantizadas en SCR y en SCC siempre cumplen $t_{SCC} \geqslant t_{SCR}$, lo que asegura que las soluciones óptimas competitivas (las SCC) tienen tasa no menor que las que tienen reproducibilidad, eliminando posibles dudas en este sentido.

Por otra parte si interpretamos el poder asegurarse una tasa de beneficio como el que siempre obtiene al menos un mayor, siempre que un empresario se asegure una t_{SCC} ésta coincidirá con la t_{SCR} y todo lo dicho en 4.3 para SCR vale para SCC. Más aún como los dos únicos equilibrios que existen en general en estas economías son las SCR y las SCC, podremos hablar en este caso de tasa garantizada sin especificar en que equilibrio aparece, y decir que los cambios viables verifican el teorema de Okishio, tal como expone 4.3, para la tasa garantizada de la economía.

Por último debemos ver el significado de lo hecho en 3, usualmente al trabajar con estos temas se supone que hay un solo capitalista que es fiel representante de todos, porque se supone que todos tienen el mismo conjunto de procesos elegibles y que todos los procesos admiten cualquier escala, pero esta no es nuestra situación. Por ello en 3.1 y 3.2 hemos obtenido condiciones necesarias y suficientes para sustituir un grupo de agentes por uno solo que tenga los recursos de todos ellos, las condiciones son las ya dichas, que todos tengan la misma información y que los niveles de actividad posibles vayan siempre de cero a infinito.

Para los casos en que esas condiciones no se cumplan, el agente único elegido como representante tiene dos interpretaciones como ya señalamos. Una es interpretarle como un centro de planificación que dispone de la totalidad de la información, de la completa disponibilidad de los recursos producibles y de los exógenos y que puede cambiar recursos de unos procesos a otros libremente para optimizar los beneficios, pero al hacerlo así perdemos de vista muchos aspectos, que aunque no estudiamos ahora, son de interés, por ejemplo los efectos de las reducciones de coste sobre cada agente en particular, por ello es preferible la otra interpretación para ese agente único que posee todos los recursos, la de que es el resultado de un mercado de crédito.

Al suponer que existe un mercado de crédito donde cada agente puede pedir prestado capital que paga con un interés o prestarlo para cobrar ese interés, lo que se está haciendo indirectamente es ampliar el conjunto de procesos disponibles para cada uno. Un empresario puede no tener el mejor proceso pero presta su capital para que lo pongan en marcha cobrando un interés, lo que, como puede comprobarse, viene a coincidir, en general, con la tasa de beneficio marginal. De este modo, así se maximiza el beneficio global y el agente ficticio que representa a todos ellos será aquel que disponiendo de todos los recursos los distribuye de acuerdo con los criterios individuales; esto es asignado capital hasta que los rendimientos marginales tienden a coincidir.

Señalemos para finalizar que el tema no está cerrado porque pueden eliminarse restricciones en los modelos de las economías usados. En especial pueden relajarse las condiciones de 2.3 y la tercera de 4.1, y lo que es más importante todavía, porque hay nuevas direcciones de investigación: los efectos en cada agente individual, los efectos sobre la tasa de beneficio marginal global y sobre las tasas marginales individuales, las ventajas relativas entre los disintos agentes, la consideración de restricciones en los conjuntos de precios, etc. . . todo lo cual posee un gran interés.

APENDICE

A.1. *Demostración de 2.11*

Tanto en esta camo en la siguiente demostración seguimos el esquema de Roemer (1981), teorema 2.5.

Nos basaremos en el lema del punto fijo que se enuncia:
"Sea z(p): S $\rightarrow$ T una correspondencia h.c.s. (hemicontinuas superiormente) del simplex S en el compacto T, sea z(p) cerrado y convexo para todo p, y sea p z(p) $\leqslant$ 0. Entonces $\exists$ p' y z'$\in$ z(p') $\ni$ z' $\leqslant$0".

En nuestro caso definiremos la correspondencia z de esta manera:

$$z(p_p): \; S = \left\{ p_p \;\middle|\; p_p d = 1 \right\} \rightarrow \; T = \bigcup_{p_p \in S} z(p_p) =$$

$$= \bigcup_{p_p \in S} \left\{ \left(\left(\sum_t (a_o^t b_p - \hat{a}^t) \right) + hd \;\middle|\; a^t \in A^t(p_n, p_p); \right.\right.$$

$$\left. h = \min_{\substack{\bigcup \\ S}} (p, A(p))^{p_p a_f - a_o p b - p_n a_n - p_p a_p)} \right\}$$

Veamos que se verifican las exigencias del lema citado:

a) S es un simplex porque es $d > 0$

b) T es la imagen por una aplicación contínua de $A(p_n)$, que es compacto, por tanto T también lo es.

c) Para cada p_p, como $A^t(p_n, p_p)$ es cerrado y convexo también lo será $A(p_n, p_p)$ al ser $A(p_n, p_p) = \sum_t A^t(p_n, p_p)$, luego teniendo en cuenta la definición $z(p_p)$ tendremos que $z(p_p)$ es cerrado y convexo.

d) Como $p_p z(p_p) = \sum_t (a_o^t p_p b_p + p_p a_p^t - p_p a_f^t) + h \leqslant$

$$\leqslant \sum_t (a_o^t\ pb + p_n a_n + p_p\ a_p^t - p_p\ a_f^t) + h = (-\text{ beneficios en a}) + h \leqslant 0$$

se cumple que $p_p\ z(p_p) \leqslant 0$

e) Sean $p_p^i \rightarrow p_p'$, $z^i \in z(p_p^i)$ y $z^i \rightarrow z$. Como $z^i = a_o^i\ b_p - \hat{a}^i$ hay definida una sucesión a^i, que al ser $A(p_n)$ acotada también lo es; sea $\{a^j\}$ una subsucesión convergente de $\{a^i\}$, que existe por la acotación de esta, y $\{p_p^j\}$ la subsucesión asociada, se verificará

$$p_p^j \rightarrow p_p, \qquad a^j \rightarrow a, \qquad a^j \in A(p_n, p_p^j)$$

luego a $\in A(p_n, p_p)$ por ser A(p) h.c.s.. En consecuencia $z = a_o b_p - a$ pertenece a $z(p_p)$, con lo que queda probado que $z(p_p)$ es h.c.s.

Tras ver las propiedades anteriores, es claro que se puede aplicar el lema del punto fijo y por el se puede asegurar que existen p_p' y $z' \in z(p_p')$ que es $\leqslant 0$, luego que hay $a' \in A(p_n, p_p') \ni a' \geqslant a_o'\ b_p$, esto es que existe una S.C.R.

A.2. *Demostración de 2.12*

Se basa como la anterior en el lema del punto fijo, teniendo con ella algunas ligeras variaciones que señalo:

1) z(p) se define en la forma siguiente

$$z(p)\colon\ S = \left\{ p_p \quad p_n \text{ fijo}, p_p d = 1 \right\} \rightarrow T = \bigcup_{p \in S} z(p) =$$

$$= \bigcup_{p \in S} \left\{ \sum_t (a_o^t\ b_p + a_p^t) - S_p \quad a^t \in A(p_n, p_p) \right\}$$

2) Cambia el apartado d) así:

$$pz(p) = \sum_t (a_o^t\ p_p b_p + p_p a_p^t) - p_p S_p \leqslant 0$$

Como también se cumplen las condiciones del lema del punto fijo existe un a' ϵ A (p_n, p'_p) que verifica $a'_o b_p + a'_p \leqslant S_p$, luego hay una solución casicompetitiva.

A.3. *Demostración de 2.14*

El apartado a) es trivial, el b) veamoslo en partes

1) Como p_n es fijo y $p_p d = 1$, con $d > 0$, p $(p, a) \in H(p_n)$ es acotado. Además a $(p,a) \in H(p_n)$ C $A(p_n)$, que es acotado, luego $H(p_n)$ lo es también.

Para ver que $H(p_n)$ es cerrado, sea (p,a) un punto de acumulación de $H(p_n)$, sabemos que $\exists \left\{(p^i, a^i)\right\} \ni p^i \to p$, $a^i \to a$, $(p^i, a^i) \in$ $\in H(p_n)$, más como A(p) es h.c.s. a $\in$ A(p), pero además como $p_p d = 1$ y $a_f - a_p - a_o b_p \geqslant 0$, como puede verse fácilmente, se tiene que $(p,a) \in$ $\in H(p_n)$, luego este conjunto es cerrado.

3) Como $H(p_n)$ es compacto basta ver que la tasa de beneficio es una función contínua, más $t(p,a) = (p_p a_f / g(p,a)) - 1$ es contínua por definición al ser siempre $g(p,a) \neq 0$.

2) y 4) Son similares a 1) y 3)

A.4. *Demostración de 4.3*

Veamos algunos resultados previos que son necesarios. Sea Q el cono convexo generado por P y el vector O y Q su frontera; siempre es posible encontrar en Q conos poliédricos Pol^j que cumplen:

i–1) Los rayos extremos son vectores de Q y son generados uno a partir de otro por ampliación sucesiva con nuevos sectores.[5]

i–2) $Pol^j \subset Pol^{j+1}$, $\forall j$

i–3) $\lim_j Pol^j = \overline{Q}$ y por tanto $\lim_j (Pol^j \cap P) = \lim_j P^j = P$

5. Observar que $Pol^j \subset Q$, $\forall$ j.

i–4) En Pol^1 hay un $a \in P \ni a_f > 0$ y un $a \in A(p)$ asociada con la t_{min} de SCR (la condición i–4) es posible por la 2) de 4.5 y por 2.14).

Con cada uno de estos Pol^j hay asociada una economía de Von Neumann, si $\left\{a^i\right\}_{i=1}^{r}$ son los vectores extremos la economía asociada está definda por una matriz de outputs $B = (a^i_f)$ y otra de inputs $A = (a^i_p + a^i_o b_p + d\, p_n\, (a^i_n + a^i_o\, b_n))$.

Como se cumple 1) de 4.1, los rayos extremos de todos los Pol^j tendrán sus $A^i_j > 0$, $\forall i$, por tanto los Pol^j cumplen la condición de Gale de que las columnas de los inputs sean $\geqslant 0$ y la condición de indescomponibilidad. Además por i–4), $\forall$ Pol^j verificará que todas las filas de sus correspondientes matrices de coeficientes de outputs son $\geqslant 0$ (2ª condición de Gale). En resumen los Pol^j verifican las condiciones usuales de existencia de solución en economías Von Neumann.[6]

Teniendo en cuenta lo anterior sabemos que para cada Pol^j, existen (p^j_{min}, a^j_{min}) con $a^j_{min} \neq 0$, que son soluciones óptimas y con reproducibilidad de los Pol^j, considerados como economías de Von Neumann, y que dan la tasa t^j_{min} garantizada en Pol^j.[7] Por 2.3 podemos decir que alguna de esas (p^j_{min}, a^j_{min}) son SCR de los $P^j = Pol^j \cap$ $\cap$ P y que t^j_{min} será también su tasa garantizada. Por comodidad la notaremos por p^j, a^j y t^j. Recordamos que estos p^j tienen p^j_n fijo y que $p^j_p\, d = 1$.

Por 2.14 sabemos que en P hay una SCR que da la tasa garantizada, sea la (p,a) y t dicha tasa.

Como p^j es acotada, lo es a^j al ser el conjunto

$$\bigcup_{p_p \in S \,=\, \left\{ p_p \,\middle|\, p_p d = 1 \right\}} B(p_p) \text{ acotado y también lo es } t^j$$

6. Las condiciones de existencia de soluciones y las características de estas pueden verse en Gale (1960), pág. 310–15 y en Vegara (1979), pág. 91-100.

7. Aunque algunas t^j_{min} sean < 0, como $t_{min} > 0$, esto no tiene importancia como se ve después.

porque al $\exists$ a ϵ A(p) que pertenece a Pol^1, a es en todo Pol^j admisible y óptima y su tasa de beneficio t es cota superior de todas las t^j, sabemos que hay subsucesiones de ellas, que por comodidad notaremos igual, que $p^j \rightarrow p'$, $a^j \rightarrow a'$ y $t^j \rightarrow t'$, y debemos ver que $t(p', a') = t' = t = t(p,a)$.

a) Como $a^j_f - a^j_p - a^j_o\, b_p = 0,\ \forall j \Rightarrow a'_f - a'_p - a'_o\, b_p \geqslant 0,$

luego a', tiene reproducibilidad.

b) a' es admisible porque $g(p^j, a^j) \leqslant p^j_p\, S_p \Rightarrow g(p', a') \leqslant$

$\leqslant p'_p\, S_p$

c) Sean los b' ϵ P, admisibles a precios p'. Como $\lim_j P^j = P$, si b' ϵ P^j desde un j_o en adelante

$$p^j_p\, a^j_f - g(p^j, a^j) \geqslant (p^j_p\, b'_f - g(p^j, b'))\ d^j$$

con $d^j \leqslant 1$, $d^j \rightarrow 1$, $d^j b' \epsilon P^j$ y $d^j b'$ admisible a precios p^j luego

$$p'_f\, a'_f - g(p', a') \geqslant p'_p\, b'_f - g(p', b')$$

Si b' $\notin$ P^j para ningún j, $\exists \left\{ b^i \right\} \rightarrow b'$, b^i ϵ Pol^i y como para todo b^i es cierta la expresión anterior, pasando al límite, lo será también para b'. En consecuencia a' maximiza en P los beneficios para (p_n, p'_p) entre los a ϵ P admisibles, esto es a' ϵ A(p'), y t' $\geqslant$ t. Como además $t^j \leqslant t$, $\forall$ j se tendrá t' = t y (p', a') será SCR de P.

Apoyándonos en lo visto de que los Pol^j definen la tasa garantizada como límite de las t^j podemos abordar los tres apartados de la proposición, que vienen a ser la extensión de Roemer (1980) para economías de Von Neumann.

Veamos a), si se incluye un nuevo cambio técnico $\tilde{a}$, podemos definir unos nuevos $\widetilde{Pol}^j$ con las mismas cuatro condiciones, tales que $Pol^j \subset \widetilde{Pol}^j$ y $\tilde{a} \epsilon \widetilde{Pol}^j$, así tendremos t^j y $\tilde{t}^j$. Teniendo en cuenta como se define usualmente la tasa garantizada en economías de Von Neumann a través de los precios es trivial que $t^j \leqslant \tilde{t}^j$, luego $t = \lim_j t^j \leqslant$

$\leqslant \lim\limits_{j} \tilde{t}^j = \tilde{t}$ que es lo afirmado en a).

Para ver b) incorporamos a los Pol^j el nuevo vector $\tilde{a}$ ($\tilde{a} \notin Q$ luego $\tilde{a} \notin Pol^j, \forall j$) y tomaremos como $\widetilde{Pol}^j$ conos generados por $\widetilde{Pol}^j$, a y un a que es SCR en $\tilde{P}$ con $\tilde{t}_{min}$; los $\widetilde{Pol}^j$ así obtenidos tienen a $\tilde{a}$ como rayo extremo. Para cada $\tilde{P}^j$ obtendremos $\tilde{p}^j$ y $\tilde{a}^j$ que den en $\tilde{P}^j$ la tasa garantizada $\tilde{t}^j$. Ya sabemos que $\tilde{p}^j \to \tilde{p}$, $\tilde{a}^j \to \tilde{a}$ y $\tilde{t}^j \to \tilde{t}$; siendo $\tilde{a} \in \tilde{A}(\tilde{p})$ en $\tilde{P}$ y t la tasa en P. En consecuencia para el rayo extremo $\tilde{a}$ y para los extremos $e^{j,i}$ de Pol^j se verifica

$$\tilde{p}^j_p \, \tilde{a}_f \leqslant (1+\tilde{t}^j) \quad . \quad g(\tilde{p}^j, \tilde{a})$$

$$\tilde{p}^j_p e^{j,i}_f \leqslant (1+\tilde{t}^j) \quad . \quad g(\tilde{p}^j, e^{j,i})$$

Por a) sabemos que $t \leqslant \tilde{t}$ y si fuera $t = \tilde{t}$, pasando al límite en las últimas desigualdades tendríamos

$$\tilde{p}_p \, \tilde{a}_f \leqslant (1+t) \quad g(\tilde{p}, \tilde{a})$$

$$\tilde{p}_p \, a_f \leqslant (1+t) \quad g(\tilde{p}, a), \; \forall a \in Q$$

pero esto significa que $\tilde{p}$ son precios asociados a la tasa t en Q y en P contra la hipótesis de que $p_p \tilde{a}_f > (1+t)\, g(p, \tilde{a})$ por ser viable, en consecuencia debe verificarse que es $t < \tilde{t}$.

Sea ahora c). Si p_{min} es único, al ser a viable verifica las condiciones de b) y por tanto se incrementa la tasa garantizada. Recíprocamente si se incrementa esta para todo cambio viable no puede haber dos p_{min}; ya que si los hubiera podemos encontrar un v de separación

$$p_p v > 0, \; q_p \, v \leqslant 0$$

y es posible encontrar vectores a' y b' tales que

1) $v = (1+t_{min})\, a' - b'$

2) $a' \geqslant a_o b_p + a_o dp_n b_n$ con $a_o > 0$

3) $b' \geqslant 0$

que existen y que permiten definir $\tilde{a} = (a_o; 0; a'-a_o b_p - a_o dp_n b_n, b')$, que es viable en p como es fácil de ver recordando que es $p_p d = 1$.

Más para q se tiene

$$q_p b' = q_p \tilde{a}_f \leqslant (1+t_{min})(q_p(a_o b_p + a'-a_o b_p - a_o dp_n b_n) +$$

$$+ a_o p_n b_n + p_n \cdot 0) = (1+t_{min}) q_p a'$$

y por ser q solución de máximo beneficio en Q y en P se verifica

$$q_p a_f \leqslant (1+t_{min})(q_p(a_o b_p + a_p) + q_n \cdot a_n), \quad \forall a \in P$$

luego

$$q_p a_f \leqslant (1+t_{min})(q_p(a_o b_p + a_p) + q_n \cdot a_n), \forall a \in P$$

lo que significa que $t_{min} \geqslant \tilde{t}_{min} \geqslant t_{min}$, y que por tanto el t_{min} no ha crecido. En resumen pues, si se incrementa siempre la tasa garantizada solo puede haber un p_{min}.

A.5. *Demostración de 4.4*

Vamos a ver primeramente que la tasa garantizada de la economía en SCC es definible también por una sucesión de tasas garantizadas asociadas con los $P^j = Pol^j \cap P$, donde Q, Q, Pol^j se definen igual que en la demostración 4.3, pero exigiendo que en Pol^1 haya un $a \in A(p)$ asociada con la t_{min} en SCC.

Cada P^j, como cumple las condiciones de 2.12 y 2.14 tiene una tasa garantizada en SCC y una SCC asociada que denominaremos con t^j, (p^j, a^j). Igualmente las de P serán t y (p, a).

Como $\{p^j\}$ es acotada, $\{a^j\}$ lo es por razones similares a las dichas en la demostración 4.3 y también la t^j, (al ser $a \in A^j(p)$, $\forall j$, es SCC en P^j, $\forall j$, y en consecuencia es $t^j \leqslant t$, $\forall j$) tenemos subsucesiones convergentes de ellas, que notaremos igual, tales que

$$p^j \to p', \quad a^j \to a', \quad t^j \to t'$$

y queremos ver que $t(p', a') = t' = t = t(p,a)$.

Como $p^j \to p'$, $a^j \to a'$, es trivial que (p', a') verifica las condiciones 2 y 3 de la definición de SCC y que a' es admisible. Además razonado exactamente como en el apartado c) de la demostración de 4.3 llegamos también a que $a' \in A(p')$ en la economía de P. Por tanto (p', a') es una SCC y podemos asegurar que $t' = \lim t^j$. Además como (p', a') es SCC se tiene que $t \leqslant t'$ y como también $t^j \leqslant t$, $\forall j$ se verificará $t = t'$, como queríamos demostrar.

Ahora bien en cada Pol^j, como es una economía de Von Neumann y cumple las condiciones necesarias, la tasa garantizada de las SCR está dada por $\rho_{\min}-1$, pero las SCC tienen precios que también deben de cumplir $pB \leqslant (1+t)\, pA$ luego sus tasas de beneficio no serán menores que $\rho_{\min}-1$. En consecuencia si $\{\overline{t^j}\}$ es la sucesión de las tasas garantizadas de los Pol^j en las SCR y $\{t^j\}$ la de las SCC, siempre tendremos $\overline{t^j} \leqslant t^j$, $\forall j$, de donde se deduce que: tasa garantizada en SCR de P $\leqslant$ tasa garantizada en SCC de P.

BIBLIOGRAFIA

GALE, D. (1960): *"The theory of linear economic models".* Mc Graw – Hill, New York.

OKISHIO, N. (1961): "Technical change and the rate of profit". *Kobe University Economic Review,* 7, 86–99.

ROEMER, J. (1980): "Innovation, Rates of profit and Uniqueness of Von Neumann Prices". *Journal of Economic Theory,* 22, 451–464.

ROEMER, J. (1981): *Analytical foundations of Marxian Economic Theory.* Cambridge University Press.

SANCHEZ, J. (1984): El teorema de Okishio en economías convexas". Comunicación presentada al Simposio de Teoría Económica y Econometría de la Universidad Autónoma de Barcelona. Septiembre 1984.

SANCHEZ, J. (1985): "Equilibrios en economías convexas con recursos iniciales dados", *Cuadernos Aragoneses de Economía,* núm. 9. Fac. de CC.EE. y EE. Universidad de Zaragoza.

VEGARA, J.M. (1979): *Economía política y modelos multisectoriales.* Tecnos, Madrid.